

工学基礎教育としての数学教育に関して

新潟大学 工学部 工学力教育センター

永 幡 幸 生

新潟大学工学部工学力教育センター工学基礎教育部門の一員として、新潟大学工学部の数学教育を担当して、感じていることをこの場で書かせて頂き、工学教育の発展につながることを期待します。

最初に結論を書いてしまえば、工学系の基礎教育としての数学は上を目指せばきりはないが、現状でできる限りのことは十分なレベルで行われていて、もっと余裕をもって教育できればもっと良い結果になるのではないかということです。

工学教育における数学は、例えば JABEE の認定基準の中にも「数学、自然科学及び情報技術に関する知識とそれらを応用する能力」という項目があるように、工学分野の基礎として必要であると考えられていると思います。一方で「数学」とは何なのでしょう？それは小学校で習った四則演算に始まり、ほぼすべての工学部で教えている微分、積分、線形代数に代表されるような各種計算方法を指すのでしょうか？数学の啓発書¹の中で、クラウゼヴィッツの「戦争は他の手段による政治の拡張である」の書き方を借りて「数学とは他の手段による常識の拡張である」と述べてられています。この標語はいろいろな省略を含んでいますが、非常にうまく数学を捉えていると思います。数学は「曖昧ではなく」前提を確認して適用した場合には「必ず成立すること」を集めたものです。そのため場合によってはなぜそれが正しいのか、なぜ必ず成立するのかを考慮せずに「常識」として取り扱うことが可能です。そして「常識」として運用することがよい選択になることが多くあります。この考え方から「数学に関する知識とそれらを応用する能力」を「学ぶ、学習する、教える、教育する」ことを捉えようとどうしても「常識を覚える、覚えた常識を適用してみる」ことが主体になってしまいます。このこと自体は、必ずしも悪いことだとは思っていないのですが、同時に中途半端に覚えたために弊害も起こっているように感じます。

この文章を書いている最中にちょうど期末試験の終わった線形代数の例で挙げれば、「行列の対角化の方法を覚え、簡単な行列に適用して実際に対角化し

てみる」となります。多くの工学分野で陰に陽に行列の対角化は用いられていることもあり、授業中に絶対に試験で出すから必ず計算できるようにと告知をしておいたため計算間違いを除けばよくできていたように思います。一方で同じ試験で1次方程式の問題も出したのですが、こちらはかなり悲惨な状況でした。どこからこのような状況が起こったかという、演習問題としてある種パターン化された問題を準備しておいたのですが、この問題に似たもっと簡単な問題を出したところ、単純にパターン化された問題に当てはめて解答しようとして、全く意味不明な解答をしている学生が大勢いたということです。

これは「対角化」という「常識」は手順通りに適用することができましたが、「1次方程式」という「常識」においては、実際はいくつかの手順があるにもかかわらず、パターン化された問題と同じように見えてしまったため、最初の方にある省略してはいけない手順を省略してしまったとみることができます。

もう一つの弊害として、試験では見つけにくいのですが、数学は「常識」としてしまったために、分かる前と、分かった後で全然違うものが見えてしまいます。私は数学の中でも確率論を専門にしていますので、その偉大な先駆者である伊藤清先生の言葉を引用させていただきます。伊藤先生は確率解析を開拓してきた方ですが、講演会²で確率論を研究し始めたころに関して、次のようなことを述べられています。

「…X というのがあって X というのはある確率法則 μ につながる、Y は ν につながると、ここまでは分かるけれども、では $X+Y$ はいったい何だというのです。これが分からない。分からないのは当然であって、これが分かるためには、X と Y を一つの空間の上の関数 $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ として表現したら初めて分かるわけです。今は表現したもののことを確率変数と言っていますから、われわれがもった疑問がなんであるか、説明するといっても説明のしようがないのですね。…(中略)…いまでも中学生などで $a+b$ が分からないという人に会うと、本当はこの人は偉い人なのではないかと思うんです。…」話の中の一部を持って

きていて、少し笑いを誘っている部分でもあります。かなり本質をついている言葉だと思います。

この言葉自体は、背景として、伊藤先生が確率論の研究を始めたころは、確率論は数学か？というような数学者がいるレベルで確率の定義自体が少しあやふやで経験的にこうだろうという解釈の余地のあるものでした。一方でこのころからいわゆるコロモゴロフ流の測度論を基礎とした、解釈の余地のない確率の定義が出され、次第にこの定義に沿った確率論で統一され、発展していくという歴史があり、伊藤先生自身もご自身の研究を振り返ってとにかくすべてをコロモゴロフ流に研究しようとしていたのだという話の導入部分です。

話を工学教育に戻しましょう。通常の授業ではなかなか質問をしてくれませんが、たまに質問をしてくる学生の中に、このようなタイプの「分からない」質問をしてくるものがあります。「ある問題を解いているのですが、この x にはどれが、 y にはどれが対応するのでしょうか？」一番簡単な答え方は「 x にはこれが、 y にはそれが対応します。」でよいわけですが、一方でこれでは書き方まで全く同じで数値だけが違う問題には対応できますが、本質的には全く同じで書き方だけが違う問題には対応することはできません。伊藤先生の話の例でいえば $X+Y$ はたまたみ込み $\mu * \nu$ につながります。それでは $X-Y$ 、 $X+2Y$ は何につながるのであるといわれると全く答えようがなくなるわけです。一方で一度問題の意味と、対応する定式化が分かればこのようなタイプの質問はテストの時に減点されないかを訊ねるか、問題自体のミスは訊ねるかしかなくなります。この問題の一番難しいところは何となく分かった気になっているのだけれども実は分かっていなくて、さらにどこが分かっていないのかがよく分からないというところにあります。その意味で、 $a+b$ が分からないといえる人は偉い人なのではないでしょうか？（伊藤先生の言葉は省略した部分との関係でもう少し違うことを指して、ここで書いた文章の意味では話していないことを付け加えておきます。）

このタイプの間違いは、本人は分かったつもりでいますので、とにかくここはどういう意味なの？ここは何を示しているの？と分かっていれば当たり前で答えられるけれども分かっていないので何を聞かれているのか自分が分からない質問をし続けること以外では、質問された先生も質問をした学生にも何が分かって何が分からないかがわかりません。これは質問をしに来た学生から見ると簡単な質問をしに行ったはずなのに、なぜか叱られているような気持

になってしまって、一度目はともかく、二度目に質問しにこうという気はなくなってしまうでしょう。

さてこれらの弊害をなくすことは可能でしょうか？それは可能であり、不可能でもあるでしょう。まず不可能だといっている最大の部分は、これは授業だけではどう頑張っても解消することはできないということです。初めの問題に関して、レポート問題を多く出して採点をして返せば大丈夫と思うかもしれませんが、このような間違いをする人は、単純に手順を間違えただけで、正しい手順を覚えればよいとだけ思うため、間違いを指摘されるだけでは決して何を修正しなければよいのかを理解してくれません。二つ目の問題にいたっては、そもそも手を下すことすらできません。それでは可能だと思っている理由を実際に数学科ではどのように解決している、解決しようと思っているかに問題をすり替えてみましょう。数学科においては基本的には演習の時間を多くとり演習問題を解き、黒板などを使って解説してもらおうことでこれらの問題に対応しているように見えますが、実際にはこれだけでは全く不十分で、(大学によりますが) 3年生もしくは4年生から始める卒業研究におけるセミナーで対応することになります。数学科でのセミナーは大抵の場合教科書をよく読んでそこに書かれていることを、黒板などを使って解説、報告することになります。このようなことを行うと効果は抜群で、本人は分かったつもりで解説をしているつもりでも、すぐに馬脚を現し一つ目の適切な手順をふまないタイプの間違いも出てきますが、特に二つ目の何が分かっていないのかが分からないことがすぐに出てきます。ここでも、ここはどういう意味なの？ここは何を示しているの？と分かっていたら当たり前で答えられるけれども分かっていないので何を聞かれているのか自分が分からない質問をし続けることになり、やはり学生の側からみると叱られているような気になります。ただし何度も続けていると、多くの学生は、自分が分かっていなかったと気付くのですが、同時に先生は厳しかったと思うようです。一方で、多くの学生を一度に受け持っているようなセミナーでは、学生同士の実力の差や、一人一人にかけられる時間の制限などもあり、分かっていないということを気付かないまま、あの時は先生厳しかったなと思うだけで卒業してしまう学生もおります。さて、この弊害を解消するのはかなり難しいだろうということが分かります。数学科ですら、最終年度のセミナーを使って解消しているものを、多人数での授業で行うことはほぼ不可能です。現在の教員数でもほぼ不可能なことを、さらに予算縮小

で教員を減らしている日本の現状で行うことはまず無理なことでしょう。

この文章を読んでいて、アクティブラーニングを連想した方も多いと思います。実際に数学科のセミナーは（もちろん工学部における卒業研究に代表される、研究室における教育も）アクティブラーニングの典型例だと考えています。基礎教育に対してもアクティブラーニングを取り入れるということは一見よいように見えますが、かなり難しいことだと思っています。先にも書きましたようにセミナーのような形をとるためには多くの教員数が必要です。レポートなどを増やして、それをアクティブラーニングというのであれば、それは多分言葉の誤用、よくて曲解ということになるのではないのでしょうか？基礎教育とはこれから工学の各分野を学んでいくために必要となる基礎知識を蓄えていくことが中心であり、自主的に学ぶことは重要ですが、一方で勘違いや思い違いなどによる間違いは非常に危険です。これらを適切に修正していくにはやはり教える側に多くの労力が必要となります。

さてなにか基礎教育は十分ではないというような書き方に見えてしましますが、最初にも書きました通り、筆者が感じているところは、工学系の基礎教育としての数学は上を目指せばきりはないが、現状できる限りのことは十分なレベルで行われていて、もっと余裕をもって教育できればもっと良い結果になるのではないかということです。

この文章を書いている最中に「経団連「数学は全学生必修に」若手育成で提言」という新聞記事³がでてきました。ここでの育成対象はすべての大学生で、「数学」は見出しのためだけで、実際には「情報科学や数学、歴史、哲学などの基礎科目を全学生の必修科目とする」ことを提言しているようです。工学教育においてはこれらのことは実質的に既に必修科目となっていると思います。この提言はあまり工学部の方には向けられていないような感じもしますが、かなり遅きに失した発言のように感じると共に、基礎教育を大事にする工学教育の重要性を感じます。一方で今までこのようなことが出てこなかったことは工学教育の重要性を発信してこなかった工学部の責任でもあるのではないのでしょうか？

最後に工学教育における数学の立場でこの文章を書きましたが、「数学」を皆様の対応する教科、学科、学会名などに入れ替えてみると実は同じなのではないのでしょうか？数学によらず、理工系の学問分野はある種「常識」の積み重ねで成り立っています。現在の科学技術はこれらの「常識」がかなりの数積み重ね

られて、すべてを習う、教えることは不可能になっています。そのため教える部分を取捨選択する必要がありますが出てくると思いますが、すべてを教えようと上を見ればきりがなく、現状できる限りのところで十分なことを選択して、もっと余裕があればもっとよく教えられると考えているのではないのでしょうか？この文章を読んで頂いた方にはぜひとも工学教育の現状をいろいろなところで発信していただき、もっと余裕があればもっと良い教育ができるということを発信していただきたいと思います。

参考文献、参考資料

1. ジョーダン・エレンバーグ、データを正しく見るための数学的思考—数学の言葉で世界を見る、日経 BP 社、2015 年
2. 伊藤清、関西確率論セミナーにおける講演、1985 年、(日本数学会ホームページ中ビデオアーカイブよりどなたでも視聴可能です。)
3. 日本経済新聞電子版、2018 年 12 月 4 日の記事より